dr Nebojša Ralević
Fakultet tehničkih nauka,
Univerzitet u Novom Sadu

dr Marija Paunović
Fakultet za hotelijerstvo i turizam,
Univerzitet u Kragujevcu

Milenijum osiguranje a.d.o.

KOPULA MODELI U AKTUARSTVU

Jedan od problema koji se javljaju u osiguranju je rešavanje pitanja moguće zavisnosti između rizika. Primera takvih situacija gde se javljaju zavisne varijable ima mnogo u osiguranju. Aktuarima je interesantno modeliranje koreliranih fenomena, posebno modeli koji pružaju dobru opciju razdvajanja i rada u dve potpuno odvojene faze:
1) izgradnja posebnog modela za svaki fenomen, jednostavan ili složen, ali nepovezan sa drugim modeliranjem, i
2) upravljanje zajedničkim ponašanjem, obezbeđujući snažnu korelaciju u nekim delovima sistema i nisku korelaciju sa drugim delovima.

Na primer, aktuar analizira portfolio polisa osiguranja. Polise imaju različito trajanje, ugovorne odredbe, faktore rizika i dr. Neke polise su relativno jednostavne za modeliranje, poput ekstrapolacije i prilagođavanja (npr. kao što je slučaj sa tablicama smrtnosti). Za neke polise potrebno je modeliranje zasnovano na nekoliko koreliranih stohastičkih procesa, kalibriranih prema podacima na npr. različitim tržištima.
Aktuar zna da su skoro sva plaćanja iz osiguranja osetljiva na zajedničke faktore rizika, recimo poput recesije, rata i slično. Neće sve isplate nužno biti izazvane ovim makro „poremećajima“. Što je veća verovatnoća ovakvog nepovoljnog scenarija, to bi trebalo da budu niže granice rizika i/ili izdvajanje veće rezerve. Da bi izračunao tačne iznose, aktuar mora da modelira korelaciju između različitih linija (vrsta) osiguranja.
Postoje različiti izvori za bivarijantne i multivarijantne modele. Većina distribucija obično se fokusiraju na multivarijantne distribucije sa marginalnim distribucijama istog tipa. Od veće praktične vrednosti su metode koje konstruišu bivarijantni ili multivarijantni modeli iz poznatih marginalnih distribucija i zavisnost između rizika. Postoji mnogo načina da se opiše ova zavisnost ili povezanost između slučajnih promenljivih, na primer koeficijent korelacije kao klasična mera zavisnosti.
Linearna korelacija je klasični pristup modeliranju zavisnosti rizika, ali ne uključuje sve moguće strukture zavisnosti. Prikladna metoda za modeliranje strukture zavisnosti je korišćenje kopula, za koje je posljednjih godina sve veći interes istraživača i praktičara.

Kopula, latinskog porekla i označava „vezu“. Pojam kopula (u matematičkom smislu) prvi je uveo Sklar 1959. godine (Sklarova teorema). Kopule su važne za statističare iz dva razloga, i to kao način za proučavanje ’’scale-free’’ mera

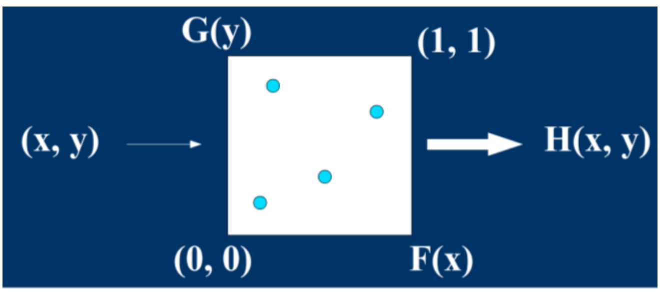
zavisnosti, a i kao polazna tačka za konstrukciju familija dvodimenzionalnih raspodela.
Skarova teorema čini kopule popularnim u modeliranju koreliranih fenomena.

Osnovna ideja kopule je da se svaka zajednička raspodela iz slučajnog vektora može prevesti u njegovu marginalnu raspodelu i zavisnost struktura se može opisati njegovom kopulom.

Kopula je zajednička funkcija raspodele kolekcije slučajnih promenljivih U_1, ..., U_d tako da je svaka od njih ravnomerno raspoređena na [0,1]. Iako su marginalne distribucije fiksne, kopula može poprimiti različite oblike, jer varijable U_1, ..., U_d mogu imati jaku suzavisnost ili da uopšte nemaju zavisnost, mogu biti povezane na neprekidan ili diskretni način, mogu pokazati jaču sazavisnost u repovima ili jaču zavisnost u sredini distribucije.

KOPULE

Neka su date slučajne promenljive X i Y sa funkcijama raspodele $F(x) = P(X \leq x)$ i $G(y) = P(Y \leq y)$ i njihova zajednička funkcija raspodele $H(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. Svakom uređenom paru $(x, y) \in [-\infty, \infty]^2$ možemo pridružiti tri broja $F(x), G(y)$ i $H(x, y)$ koji svi leže u intervalu [0,1]. Korespondencija koja pridružuje vrednost zajedničke funkcije raspodele svakom uređenom paru vrednosti individualnih funkcija raspodele naziva se **kopula.**



Dvodimenziona kopula (ili samo **kupula**) je dvodimenziona subkopula C čiji je domen $\mathbf{I^2}$. Kopula je funkcija $C : \mathbf{I^2} \to \mathbf{I}$, koja ima sledeća svojstva:

1. Za svako $u, v \in \mathbf{I}$ važi:
   $C(u, 0) = 0 = C(0, v)$; $C(u, 1) = u, C(1, v) = v$;
2. Za sve $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbf{I}$, takve da je $u_1 \leq u_2$ i $v_1 \leq v_2$ važi:

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

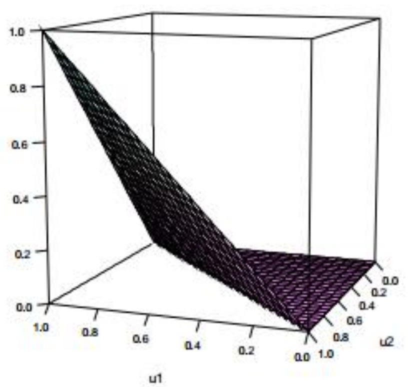
Primer 1. Kopula proizvoda: $\Pi(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \mathrm{uv}$.

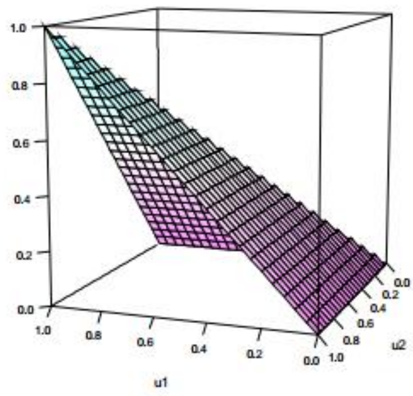
Primer 2. $\mathrm{W}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \max(\mathrm{u} + \mathrm{v} - 1{,}0)$.

Primer 3. $\mathrm{M}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) = \min(\mathrm{u}, \mathrm{v})$..

Za proizvoljnu kopulu C važi **Frechet-Hoeffding-ova nejednakost**

$$\mathrm{W}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \leq \mathrm{C}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \leq \mathrm{M}(\mathrm{u}, \mathrm{v}) .$$





Donja Frechet-Hoeffding-ova granica Gornja Frechet-Hoeffding-ova granica

Postoji još mnogo, dobro istraženih, porodica kopula, različitih svojstava i karakteritika.

Primer 4. Arhimedova kopula dimenzije d

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi^{-1}[\phi(u_1) + \cdots + \phi(u_d)]$$

gde je $\phi: [0,1] \to [0, \infty]$ striktno opadajuća, konveksna i neprekidna funkcija i $\phi(1) = 0$, koja se zove generator.

U zavisnosti od generatora imamo različite Arhimedove kopule. Takva je npr. **Gumbel Hogard kopula**

$$C(u_1, \dots, u_d) = exp\left\{-\left[(-(ln\, u_1)^{\theta} + \cdots + (-ln\, u_d)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right\}$$

Primer 5. Kopule preživljavanja

U praksi čestu primenu imaju kopule preživljavanja. **Funkcija preživljavanja** predstavlja verovatnoću da neka slučajna veličina premaši određenu vrednost. Za par slučajnih veličina (X, Y) sa zajedničkom funkcijom raspodele H, **zajednička funkcija preživljavanja** data je sa $\overline{H}(x, y) = P\{X > x, Y > y\}$. Marginalne funkcije funkcije $\overline{H}$ određuju se kao $\overline{H}(x, -\infty) = \overline{F}(x)$ i $\overline{H}(-\infty, y) = \overline{G}(y)$ i predstavljaju jednodimenzione funkcije preživljavanja.

$$\overline{H}(x, y) = \hat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)),$$

gde je $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$ **kopula preživljavanja** od X i Y.

Freše-Hefdingove granice za zajedničke funkcije raspodele su bitne i zato što gornja Freše-Hefdingova granica odgovara pozitivnoj savršenoj zavisnosti, a donja granica odgovara negativnoj savršenoj zavisnosti

$$\max(F(x) + G(y) - 1, 0) \le H(x, y) \le \min(F(x), G(y)) .$$

Kako su M i W kopule, granice u prethodnoj nejednakosti su zajedničke funkcije raspodele nazivaju se Freše-Hefdingove granice za zajedničku funkciju raspodele H sa marginalnim funkcijama F i G.

PRIMER PRIMENE KOPULA

Kopula funkcija se koristi za određivanje marginalnih raspodela svakog racija šteta i strukture zavisnosti između njih. Kako bismo dobiti zajedničku funkciju raspodele dva racija šteta X i Y, prvo ih transformišemo u slučajne promenljive U_1 i U_2 respektivno uniformno distribuirane na [0,1] korišćenjem odgovarajuće marginalne distribucije F_X i F_Y.

$$U_1 = F_X(X)$$
$$U_2 = F_Y(Y).$$

Zatim, multivarijantna funkcija raspodele se može izvesti zamenom prethodnog u kopula funkciju:

$$\begin{aligned} F_{XY}(x, y) &= P(X \le x, Y \le y) \\ &= P(F_X^{-1}(U_1) \le x, F_Y^{-1}(U_2) \le y) \\ &= P(U_1 \le F_X(x), U_2 \le F_Y(y)) \\ &= C(F_X(x), F_Y(y)), \end{aligned}$$

gde su F^{-1} inverzne funkcije univarijantnih marginalnih F_X i F_Y i važi kada je funkcija F neprekidna i strikno rastuća.